

УДК 378.147:51

DOI 10.31494/2412-9208-2021-1-1-326-335

THE DEFINED INTEGRAL COMPETENCE ORIENTED STUDY WITHIN THE COURSE OF MATHEMATICAL ANALYSIS AT INSTITUTIONS OF HIGHER EDUCATION

КОМПЕТЕНТІСНО ОРІЄНТОВАНЕ ВИВЧЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА В КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Sergiy SEMENETS,

Doctor of Pedagogical Sciences,
Professor

sergij.semenetss@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0003-2733-0539>

Sergiy DAVIDCHUK,

Senior Lecturer

davidsp1973@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0001-7676-7425>

Сергій СЕМЕНЕЦЬ,

доктор педагогічних наук,
професор

Державний університет
“Житомирська політехніка”

вулиця Чуднівська, 103
м. Житомир, 10005

Zhytomyr Polytechnic State
University

✉ 103, Chudnivska St.,
Zhytomyr, 10005

Original manuscript received: March 17, 2021

Revised manuscript accepted: April 20, 2021

ABSTRACT

The article studies the implementation of competency approach while training future professionals. It also highlights the need for a didactically balanced transition from theory to practice of competence mathematical education. The research is caused by a sharp contradiction between the theory of developed competence mathematical education and the lack of didactic and, therefore, methodical preparation has to take into account the structure and characteristics of phenomenological mathematical competence. The purpose of the article is to reveal the peculiarities of competence oriented study of defined integral in the course of mathematical analysis at higher educational institutions by applying both the theory and methodology of competence mathematical education. The methods of content theoretical and structural system analyses, the transition from abstract (general) to specific (partial), content and theoretical generalization are used in order to achieve the purpose.

It is established that competence oriented study of defined integral has to provide the development of either external measurements of mathematical competence of graduating students (content theoretical, procedure acting, reference and communication), or internal measurements of such competence (value and motivational, reflexive and evaluative, personal and psychological).

A logical and didactic model for competence oriented study of defined integral with two – level structure is developed. On the one hand, it demonstrates the stages of applied task solving process by using defined integral, and on the other hand, it establishes the path of educational cognition, which ensures its development and conscious mastering.

It is found that the formulation and solving a training theoretical and competence task is the cornerstone of competence oriented study of defined integral, which is classified

as a reflective task. In such a way, the formation of a generalized way of actions in the process of solving typical tasks is provided, as well as a reflection of the learning process is performed (self-analysis, self-control, self-correction and self-assessment).

It is proved that competence tasks mainstream the external and internal measurements of mathematical competence and their solutions imply the fulfillment of manner of actions outlined in the article.

Key words: mathematical competence, competence tasks, mathematical analysis, defined integral, competence oriented study.

Вступ. З огляду на сучасну концепцію математичної освіти на часі є дидактико-методичні дослідження, у яких студіюється проблема реалізації компетентнісного підходу в підготовці майбутніх фахівців. Важливо враховувати, що нові соціальні замовлення акцентують увагу на необхідності дидактично виваженого переходу від теорії до практики компетентнісної математичної освіти. З погляду наукової методології порушена проблема передбачає використання методу сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового), у якому присутньо має враховуватися специфіка математичного пізнання, зміст його методів. Насправді потребує вирішення гостре *протиріччя між розвинутою теорією компетентнісної математичної освіти та браком дидактичного, а потому й методичного преларування, що враховувало б структуру та феноменологічні характеристики математичної компетентності*. Дотепер недостатньо розробленим залишається питання про компетентнісно орієнтоване вивчення курсу математичного аналізу в закладах вищої освіти.

У наших новітніх дослідженнях розкривається дуальна природа математичної компетентності, науково переосмислюється двоїстість її проявів. Проблемне поле складають структура та якості особистості, що належать як до зовнішніх, так і внутрішніх проявів математичної компетентності. З'ясовано, що супровідний тригранник математичної компетентності динамічно визначає тривимірну структуру її внутрішнього прояву і водночас встановлює зв'язок із тривимірною структурою зовнішнього прояву такої компетентності. Побудовані декартові інтерпретації слугували підґрунтям для тлумачення математичної компетентності як одного із різновидів *фрактала – тривимірної структури, яка складається з подібної до себе тривимірної підструктури* (Семенець, 2020), (Mandelbrot, 1983). Подальшого розвитку набуло вчення про компетентнісні задачі з математики як одного з визнаних атрибутів компетентнісної математичної освіти (Семенець, Луцик, 2020).

Мета статті – послуговуючись теорією й методологією компетентнісної математичної освіти, розкрити специфіку компетентнісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла в курсі математичного аналізу закладів вищої освіти.

Методи та методики дослідження. Для досягнення мети застосовано методи змістово-теоретичного аналізу (у визначенні ключових понять, окресленні змісту компетентнісних задач), структурно-

системного аналізу (у встановленні компонентів задачної системи навчання математичному аналізу), сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового) (у розробленні логіко-дидактичної моделі компетентнісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла), змістово-теоретичного узагальнення (у висновках роботи).

Результати та дискусії. З огляду на сучасне тлумачення родової категорії (компетентність) і дедуктивну суть математики як науки і навчальної дисципліни, вважаємо, що *математична компетентність – це інтегрована характеристика якості особистості як суб'єкта діяльності в галузі математики, завдяки якій упродовжуються основні компоненти математичної структури (поняття, відношення, аксіоми), формулюються і доводяться математичні твердження (теореми), розв'язуються задачі на побудову, дослідження і реалізацію математичних моделей, а також виконуються самоаналіз, самоконтроль, самокорекція і самооцінка процесу та результатів математичної (навчально-математичної) діяльності, планується її подальший зміст.* До математичних компетенцій відносимо *змістові та нормативно-функціональні характеристики математичної (навчально-математичної) діяльності суб'єкта, що окреслюють коло його фахово-математичних повноважень, установлюють нормативно-математичні функції в соціумі* (Семенець, 2020).

Мета компетентнісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла полягає в актуалізації та розвитку як зовнішніх вимірів математичної компетентності здобувачів вищої освіти (змістово-теоретичного, процесуально-діяльного, референтно-комунікативного), так і її внутрішніх вимірів (ціннісно-мотиваційного, рефлексивно-оцінного, особистісно-психологічного). Змістово-теоретичний вимір складають поняття, теореми та математичні моделі. Процесуально-діяльний вимір уміщує логіко-математичні операції, дії, навички та вміння. Референтно-комунікативний вимір представляють усне і писемне математичне мовлення, невербальні форми спілкування, референтність та асертивність поведінки в навчально-математичній діяльності.

Привертаючи увагу до сучасних проблеми математичної освіти (як середньої, так і вищої), зазначимо, що дотепер значною мірою нівелюються внутрішні виміри математичної компетентності – той індивідуально-психологічний ресурс, який забезпечує успішну освітньо-математичну діяльність. Досить гостро постає ця проблема у вивченні освітньої компоненти «математичний аналіз». Тут недостатньо враховуються *ціннісно-мотиваційний вимір математичної компетентності (потреби, мотиви, ціннісні установки) здобувачів вищої освіти, рефлексивно-оцінний вимір (здатність виконувати самоаналіз, самоконтроль, самокорекцію та самооцінку), мало актуалізованим є особистісно-психологічний вимір (пам'ять на математичний матеріал, дедуктивне та структурно-математичне мислення, досвід математичної діяльності, «Я-концепція» особистості, математичні здібності).*

Альфою та омегою компетентнісної математичної освіти є компетентнісні задачі з математики. Вважаємо, що компетентнісна задача з математики – це різновид рефлексивних задач, у процесі її за результатами розв'язування якої встановлюються зони актуального та найближчого математичного розвитку особистості, відбуваються якісні зміни суб'єкта математичної (навчально-математичної) діяльності, віддзеркалені у внутрішніх і зовнішніх вимірах його математичної компетентності. Такі задачі розв'язуються суб'єктами математичної (навчально-математичної) діяльності задля діагностики їхньої математичної компетентності та водночас є умовою та засобом розвитку такої компетентності (Семенець, Луцик, 2020).

Класифікаційною основою компетентнісних задач з математики слугують чотири змістово-теоретичні рівні задачної системи навчання. Отож розрізнятимемо компетентнісні задачі з математичного аналізу базового, навчального, навчально-теоретичного, навчально-дослідницького рівнів.

Представимо логіко-дидактичну модель компетентнісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла в курсі математичного аналізу закладів вищої освіти.

1. На основі навчальних задач про спосіб дій у процесі знаходження площі криволінійної трапеції, об'єму тіла обертання формулюється навчально-теоретична задача про моделювання процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла (інтеграла Рімана).

2. За результатами змістового аналізу навчальних задач встановлюється, що характерним у кожній з них є обчислення величин, які інтерпретуються адитивною функцією: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

3. Формування змістово-теоретичних абстракцій і узагальнень про обчислення шуканої величини як границі інтегральної суми або визначеного інтеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

4. Конструювання навчально-теоретичної моделі процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла.

4.1. Змістовий аналіз прикладної задачі, визначення її типу. Переформулювання задачі.

4.2. Перевірка того, що шукана величина інтерпретується адитивною функцією: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

4.3. Виокремлення характеристик (параметрів) процесу, явища.

4.4. Виділення змінних і сталих величин. Знаходження відношень, у яких перебувають змінні та сталі величини, встановлення їх властивостей.

4.5. Інтерпретація задачної ситуації засобами математики: графічне (геометричне) представлення, введення змінних (невідомих), формалізація.

4.6. Розбиття шуканої величини на n частин. Запис формули, за якою може бути обчислена кожна з величин.

4.7. Наближене обчислення шуканої величини як суми n величин. Виділення інтегральної суми.

4.8. Виокремлення інтегрованої функції, встановлення меж її інтегрування.

4.9. Знаходження шуканої величини як границі інтегральної суми, обчислення визначеного інтеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

4.10. Формулювання та запис відповіді.

4.11. Змістовий аналіз і самоконтроль виконаних дій.

4.12. Самокорекція та самооцінка засвоєння узагальненого способу дій у процесі розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла (змістова, процесуальна, референтна, ціннісна).

5. Змістове планування і добір (складання) різнотипних прикладних задач, що розв'язуються за допомогою визначеного інтеграла.

6. Самоаналіз і самоконтроль способу дій у ході розв'язування навчально-теоретичної компетентнісної задачі.

7. Самокорекція та самооцінка засвоєння моделі розв'язування навчально-теоретичної компетентнісної задачі про застосування визначеного інтеграла.

За логікою сходження від абстрактного (загального) до конкретного (часткового) реалізуємо побудовану модель (кроки 4.1 – 4.12) у процесі розв'язування прикладної задачі, що має міждисциплінарний зміст.

Задача. Яку мінімальну роботу для подолання сили тяжіння необхідно виконати, щоб насипати купу піску у формі конуса висотою H і радіусом основи R ? Густина піску ρ і його піднімають з площини основи конуса.

1. Прикладна задача фізичного змісту. З умови задачі очевидно, що мінімальна робота для подолання сили тяжіння дорівнює потенціальній енергії купи піску. Задача переформулюється так: яка потенціальна енергія купи піску конічної форми з висотою H і радіусом основи R ?

2. Як фізична величина потенціальна енергія інтерпретується адитивною функцією: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

3. Потенціальна енергія матеріальної точки обчислюється за формулою

$$E = mgh,$$

де m – маса тіла, g – прискорення вільного падіння, h – висота піднятого тіла.

4. За властивістю адитивності потенціальна енергія купи піску дорівнює сумі потенціальних енергій кожної піщинки $E_i = m_i q h_i$, де m_i та h_i змінні, а q – стала.

5. Будуємо прямий круговий конус висотою H і радіусом основи R . Вибираємо вісь абсцис, що містить висоту конуса з початком в центрі

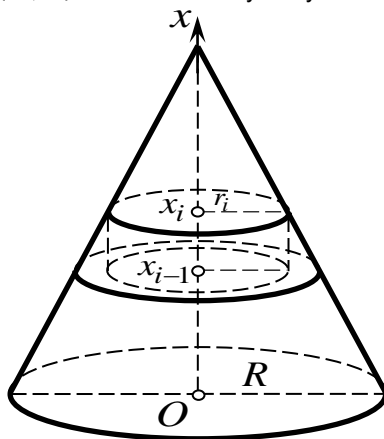


Рис.1. Математична інтерпретація.

його основи (рис. 1). Вводимо змінну та представляємо потенціальну енергію $E_i = m_i q x_i$.

6. Виконуємо перерізи конуса n площинами, що паралельні основи. Знаходимо потенціальну енергію одержаних шарів піску $E_i = m_i q x_i$.

Тут $m_i = \rho \cdot V_i$, $V_i = S(x_i) \cdot \Delta x$, де ρ – густина піску, V_i – об'єм i -го шару, $S(x_i)$ – площа поперечного перерізу, Δx – висота шару піску.

Очевидно, що $S(x_i) = \pi \cdot r_i^2$, де r_i – радіус основи i -го шару. З подібності трикутників (див. рис. 1) одержуємо

$$\frac{r_i}{R} = \frac{H - x_i}{H}.$$

Звідки $r_i = \frac{H - x_i}{H} R$.

Тому $S(x_i) = \frac{\pi \cdot R^2}{H^2} \cdot (H - x_i)^2$.

Отже, потенціальна енергія i -го шару піску

$$E_i = m_i \cdot q \cdot x_i = \rho \cdot V_i \cdot q \cdot x_i = \rho \cdot q \cdot S(x_i) \cdot x_i \cdot \Delta x = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2 (H - x_i)^2 x_i \Delta x}{H^2}.$$

7. Потенціальну енергію купи піску знаходимо наближено за формулою

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2}{H^2} \times \\ \times \left((H - x_1)^2 x_1 \Delta x + (H - x_2)^2 x_2 \Delta x + \dots + (H - x_n)^2 x_n \Delta x \right).$$

Сума, що подана в дужках, є інтегральною сумою.

8. Очевидно, що інтегровною є функція

$$f(x) = (H - x)^2 \cdot x,$$

її межі інтегрування $0 \leq x \leq H$.

9. Потенціальну енергію купи піску знаходимо як границю інтегральної суми за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$. Отож обчислюємо визначений інтеграл

$$E = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2}{H^2} \cdot \int_0^H (H - x)^2 \cdot x dx.$$

$$\int_0^H (H - x)^2 \cdot x dx = \int_0^H (H^2 x - 2Hx^2 + x^3) dx = \left(\frac{H^2 x^2}{2} - \frac{2Hx^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^H =$$

$$= \frac{H^4}{2} - \frac{2}{3} H^4 + \frac{1}{4} H^4 = \frac{1}{12} H^4.$$

$$\text{Отже, } A = E = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2}{H^2} \cdot \frac{H^4}{12} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2 \cdot H^2}{12}.$$

10. Мінімальну роботу, яку необхідно виконати, щоб насипати купу піску, знаходимо за формулою $A = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2 \cdot H^2}{12}$.

$$\text{Записуємо відповідь: } A = \frac{\pi \cdot \rho \cdot q \cdot R^2 \cdot H^2}{12}.$$

11. Усі дії виконано згідно з моделлю процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла, операції виконано правильно.

12. Зрозуміло (не зовсім зрозуміло, незрозуміло) теоретичне підґрунтя реалізованої моделі (поняття визначеного інтеграла, інтегровної функції, формула Ньютона-Лейбніца). Навчально-теоретичну модель процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла представлено викладачем (створено і реалізовано самостійно чи з допомогою). Коректування потребують деякі етапи її реалізації (змістового аналізу, формалізації, математичного моделювання, самоконтролю, самокорекції та самооцінки). Серед ціннісних орієнтирів переважали цінності процесу пізнання (успіху і визнання, відповідальності й обов'язку, розвитку і професійного зростання або ж перевагував зовнішній мотив). Результати самооцінки фіксуються. Планується зміст подальшої навчальної роботи.

Висновки. Підсумовуючи вищезазначене, формулюємо такі висновки:

1. Представлена логіко-дидактична модель компетентісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла має дворівневу структуру. Вона, з одного боку, розкриває етапність процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла, а з іншого – встановлює шлях навчального пізнання, що забезпечує її розроблення й усвідомлене засвоєння.

2. Наріжним каменем компетентісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла є формулювання та розв'язування навчально-теоретичної компетентісної задачі, яку відносимо до категорії рефлексивних. У такий спосіб забезпечується формування узагальненого способу дій у процесі розв'язування типових задач, а також виконується рефлексія процесу учіння (самоаналіз, самоконтроль, самокорекція та самооцінка).

3. Компетентісні задачі актуалізують зовнішні та внутрішні виміри математичної компетентності, передбачають відповіді на такі питання:

- 1) як саме потрібно діяти при вирішенні типових задач?
- 2) чому потрібно діяти саме так?

3) для чого потрібно розв'язувати такі задачі?

4) що саме потрібно знати і вміти, якими особистісними якостями володіти, щоб розв'язувати сформульовані задачі?

5) наскільки суб'єкт математичної діяльності готовий (знання, вміння, особистісні якості) до розв'язання задачі такого типу?

6) що саме потрібно покращити (знання, вміння, особистісні якості) та яким є подальший зміст навчально-математичної діяльності?

До перспектив подальших досліджень відносимо логіко-дидактичну модель компетентісно орієнтованого вивчення диференціальних рівнянь у курсі математичного аналізу закладів вищої освіти.

Література

Семенец С. Супровідний тригранник математичної компетентності / С. Семенец // Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. Випуск 2. – Бердянськ, 2020. – С. 96–105.

Семенец С. Задачна система компетентісно орієнтованого навчання математики учнів основної школи / С. Семенец, О. Луцик // Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. Випуск 3. – Бердянськ, 2020. – С. 162–170.

Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature: Updated and Augmented / B. Mandelbrot. – New York : W. H. Freeman and Company, 1983.

References

Semenecz` S. Suprovidny`j try`granny`k matematy`chnoyi kompetentnosti / S. Semenecz` // Naukovi zapysky` Berdyans`kogo derzhavnogo pedagogichnogo universy`tetu. Seriya: Pedagogichni nauky`. Vy`pusk 2. – Berdyans`k, 2020. – 96–105 [in Ukrainian].

Semenecz` S. Zadachna sy`stema kompetentnisno oriyentovanogo navchannya matematy`ky` uchniv osnovnoyi shkoly` / S. Semenecz`, O. Lucyk // Naukovi zapysky` Berdyans`kogo derzhavnogo pedagogichnogo universy`tetu. Seriya: Pedagogichni nauky`. Vy`pusk 3. – Berdyans`k, 2020. – 162–170 [in Ukrainian].

Mandelbrot B. (1983) The Fractal Geometry of Nature: Updated and Augmented. New York : W. H. Freeman and Company [in English].

АНОТАЦІЯ

У статті студіюється проблема реалізації компетентісного підходу в підготовці майбутніх фахівців, акцентується увага на необхідності дидактично виваженого переходу від теорії до практики компетентісної математичної освіти. Дослідження зумовлене гострим протиріччям між розвинutoю теорією компетентісної математичної освіти та браком дидактичного, а потому й методичного преларування, що враховувало б структуру та феноменологічні характеристики математичної компетентності. Мета статті – послуговуючись теорією й методологією компетентісної математичної освіти, розкрити специфіку компетентісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла в курсі математичного аналізу закладів вищої освіти. Для досягнення мети застосовано методи змістово-теоретичного аналізу, структурно-системного аналізу, сходження від абстрактного до конкретного, змістово-теоретичного узагальнення.

Обґрунтовано, що компетентнісно орієнтоване вивчення визначеного інтеграла має забезпечувати розвиток як зовнішніх вимірів математичної компетентності здобувачів вищої освіти (змістово-теоретичного, процесуально-діяльного, референтно-комунікативного), так і внутрішніх (ціннісно-мотиваційного, рефлексивно-оцінного, особистісно-психологічного).

Розроблено логіко-дидактичну модель компетентнісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла, що має дворівневу структуру. Вона, з одного боку, розкриває етапність процесу розв'язування прикладних задач за допомогою визначеного інтеграла, а з іншого – встановлює шлях навчального пізнання, що забезпечує її розроблення й усвідомлене засвоєння.

З'ясовано, що наріжним каменем компетентнісно орієнтованого вивчення визначеного інтеграла є формулювання та розв'язування навчально-теоретичної компетентнісної задачі, яку відносимо до категорії рефлексивних задач. У такий спосіб забезпечується формування узагальненого способу дії у процесі розв'язування типових задач, а також виконується рефлексія процесу учіння (самоаналіз, самоконтроль, самокорекція та самооцінка).

Доведено, що компетентнісні задачі актуалізують зовнішні та внутрішні виміри математичної компетентності, а їх розв'язування передбачає виконання окресленого в статті способу дії.

Ключові слова: математична компетентність, компетентнісні задачі, математичний аналіз, визначений інтеграл, компетентнісно орієнтоване вивчення.