

УДК 378.147

Д. Є. Бобилєв

(Криворізький державний педагогічний університет)

dmytrobobyliiev@gmail.com

## НАВЧАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОМУ АНАЛІЗУ В ПЕДАГОГІЧНОМУ ВНЗ

### Анотація

Робота присвячена вирішенню проблем, що виникають при навчанні дисципліні "Функціональний аналіз" майбутніх вчителів математики та інформатики. Науково обґрунтовано доцільність створеного навчально-методичного комплексу з функціонального аналізу, спрямованого на формування загальних і фахових компетентностей майбутнього вчителя. Підсумовано результати створення навчально-методичного комплексу з дисципліни. Зазначено рекомендації щодо його використання.

**Ключові слова:** функціональний аналіз, обчислювальна математика, навчально-методичний комплекс, професійна спрямованість навчання.

### Summary

The work is devoted to solving problems arising during presentation of the discipline "Functional Analysis" by future teachers of mathematics and computer science. The results of the creation of the educational-methodical complex in discipline are summed up.

**Key words:** functional analysis, computational mathematics, educational-methodical complex, professional orientation of training.

**Постановка проблеми.** Предметом курсу "Функціональний аналіз" є простори функцій та їх відображення. Функціональний аналіз як самостійний розділ математики склався на початку минулого століття в результаті узагальнення конструкцій математичного аналізу, лінійної алгебри та геометрії. З того часу його ідеї і методи проникають в усі області математики, фізики і в прикладні науки на правах потужної узагальнюючої теорії і зручного інструмента дослідження конкретних задач.

Вивчення функціонального аналізу характерне для математичних спеціальностей класичних університетів. Але і в педагогічних ВНЗ цей курс зустрічається в навчальних планах спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) з додатковою спеціальністю 014.09 Середня освіта (Інформатика). Освітня програма бакалаврату за вказаними спеціальностями передбачає вивчення елементів функціонального аналізу. Зазвичай, це базова частина фундаментального циклу, час вивчення курсу складає один семестр, кількість аудиторних годин невелика.

Рамки навчального часу, прикладна спрямованість і рівень базової підготовки сучасних студентів педагогічних ВНЗ не дозволяють їм засвоїти таку складну математичну дисципліну з позицій класичного підходу, який передбачає фундаментальність і самодостатність подачі суто теоретичного матеріалу. Крім того, прагматично налаштованих студентів важко зацікавити ідеєю узагальнення і формалізації математичних конструкцій. Очевидно, мотивація підвищується, якщо наблизити академічний курс до обчислювальної практики з обов'язковим залученням обчислювальної техніки. Для майбутніх учителів математики та інформатики необхідно акцентувати прикладну роль функціонального аналізу, що зводиться до аналітичного обґрунтування

ефективності застосування чисельних методів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Серед опублікованих навчальних ресурсів недостатня частина таких, що ставлять і вирішують схожу методичну проблему. Наприклад, підручники В. Треногіна [7], В. Лебедева [5] орієнтовані на прикладні спеціальності. Однак вони занадто об'ємні, складні (особливо [7]) і, хоча висвітлюють функціональний аналіз з точки зору чисельних методів, проходять не повністю шлях від ідеї до розрахункової формули, що ускладнює їх використання в педагогічному ВНЗ. Потрібна істотна адаптація вказаних підручників.

У задачниках з функціонального аналізу не прийнято акцентувати ні обчислювальну, ні навіть алгоритмічну компоненту і тим більше активно залучати комп'ютерні технології. В існуючих збірниках переважають теоретичні задачі. Вони, як правило, оперують суто абстрактними схемами (простір  $X$ , норма  $p$ , оператор  $A$  і т. і.). Переважна більшість таких задач є антиподами типових розрахунків. Втіленням такого підходу є збірник О. Кірілова, О. Гвішіані [4], рекомендований для класичних університетів, проте в тій чи іншій мірі всі задачники з функціонального аналізу тяжіють до занурення у формально-логічний апарат. При постановці навчальних завдань майбутнім учителям математики та інформатики, як мінімум, слід було б змінити форму подачі традиційних задач: перейти від абстрактних до конкретних просторів, норм, операторів і від задач на доведення до більш типових, алгоритмічних обчислень і побудов. Цей шлях реалізований у практикумі Білоруського державного університету [1], хоч і не до кінця: серед завдань не вистачає найпростіших однокрокових вправ, спрямованих на відпрацювання елементарних інструментів дисципліни.

Інший шлях наближення функціонального аналізу до обчислювальної практики полягає в тому, щоб поставити в центр задачі застосування будь-якого чисельного методу, що впливає з теорії. Така тенденція епізодично проступає в задачнику В. Треногіна, Б. Писаревського та Т. Соболевої [8]. Спираючись на підручник [7], цей задачник дозволяє ґрунтовно відпрацювати застосування функціонального аналізу до чисельних методів, але, на жаль, в основному з боку теорії, а не практики, причому на високому рівні абстракції. До того ж використання чисельних методів вимагає обчислювальної техніки, і такі спроби зустрічаються в [1; 8], але їх вага незначна. Можна зробити висновок, що в існуючих збірниках задач з функціонального аналізу майже немає задач на застосування функціонального аналізу до чисельних методів, які були б доцільні для майбутнього вчителя математики та інформатики і допускали б як математичну аргументацію, так і реалізацію з використанням обчислювальної техніки.

**Мета статті** полягає в науковому обґрунтуванні доцільності створеного навчально-методичного комплексу з функціонального аналізу, спрямованого на формування загальних і фахових компетентностей майбутнього вчителя математики та інформатики.

**Виклад основного матеріалу.** Недостатня увага до практики застосування чисельних методів в існуючих посібниках з функціонального аналізу, складених для прикладних спеціальностей, можна пояснити декількома обставинами. По-перше, сама ідеологія функціонального аналізу налаштована на високу абстрактність цього розділу математики. По-друге,

навчальні траєкторії цієї дисципліни склалися в той час, коли комп'ютерні технології були ще далекі від провідної ролі в освіті, а отже, їх підключення до навчального процесу не сприймалося як щось природне і необтяжливе. По-третє, чисельні методи традиційно представлені в окремому курсі обчислювальної математики (або курсі чисельних методів). Але, як зазначив А. Мишкіс, у технічному ВНЗ “небезпечно виділення всіх обчислювальних питань в окремий розділ курсу математики: таке виокремлення може істотно знизити ідею алгоритмічності в інших розділах курсу, які виявляються протиставлені обчисленням і тим самим знекровленими в прикладному відношенні” [6]. Ця думка актуальна і для підготовки майбутніх вчителів математики та інформатики в педагогічних ВНЗ. Додамо до цього аргументу ще й інший, обумовлений сучасним станом освіти: немає сенсу розривати обґрунтування методу та його перше пробне застосування. Наближення курсу функціонального аналізу до обчислювальної математики сприяє неперервності і зв'язності професійної підготовки. Можливо, це навіть єдиний спосіб для повноцінного впровадження функціонального аналізу в педагогічному ВНЗ. Зближення з обчислювальною математикою має бути таким, щоб повністю довести теоретичний факт до числа: простежити проекцію абстрактних ідей на площину чисельних методів і дати можливість відразу апробувати методи в обчислювальній практиці. Звичайно, рівень цього зближення повинен бути розумним, щоб функціональний аналіз не втратив свою ідентичність і не підмінявся курсом обчислювальної математики.

Для вирішення вказаних проблем проведено науково-методичне дослідження і розроблено комплекс з двох навчальних посібників: конспект лекцій [2] і збірник задач [3] з функціонального аналізу для педагогічних ВНЗ. Сформулюємо основні концепції, покладені в основу цієї розробки:

- адаптація навчального матеріалу до рівня підготовки й аналітичних здібностей студентів;
- культивування прикладної складової дисципліни, яка реалізується поєднанням функціонального аналізу та обчислювальної математики;
- модернізація курсу під використання обчислювальних засобів (прикладних математичних пакетів).

Розглянемо більш детально, яким чином ці концепції реалізовані в навчальних посібниках [2; 3].

Конспект лекцій [2] містить короткі теоретичні відомості про основні модулі функціонального аналізу: теорія стискувачих операторів, теорія рядів Фур'є в гільбертовому просторі, теорія лінійних операторів. Причому з розгляду виключені деякі складні конструкції з суто академічним значенням, які не мають наочного застосування в обчислювальній практиці. Наприклад, виключено багато елементів топології і всі суміжні з ними теореми, поняття спряженого простору й оператора, теорема Банаха про обернені оператори, теорема про доповнення метричного простору (залишена на рівні формулювання), теореми про продовження оператора, функціоналу та ін.

Поняття обмеженості лінійного оператора, ключове для більшості підручників з функціонального аналізу, замінено на еквівалентне йому поняття неперервності. Причина заміни полягає в тому, що традиційне означення обмеженого лінійного оператора не відповідає прийнятому в курсі математичного аналізу означення обмеженої функції, тоді як універсальне

поняття неперервності для оператора в метричних просторах узгоджується з неперервністю функції з курсу математичного аналізу. Неперервність оператора визначена як здатність зберігати збіжність послідовності, оскільки це означення найпростіше і використовується в чисельних методах.

Курс обходиться тільки описом інтеграла Лебега, включеним заради введення просторів Лебега, і будується без опори на теорію міри, оскільки цей розділ бакалаврського курсу математичного аналізу в більшості педагогічних ВНЗ не викладається для майбутніх вчителів математики та інформатики, і його ніяк не можна розглянути в невеликому курсі функціонального аналізу.

Виклад функціонального аналізу орієнтується на два базових завдання, які стоять на перетині фундаментальної і прикладної математики: апроксимацію функцій і розв'язання операторних рівнянь. В задачах на апроксимацію функцій за допомогою ортогональних систем порушуються питання точності і якості наближення. При розв'язанні операторних рівнянь виділені на перший план питання збіжності чисельних методів і контролю точності наближеного розв'язку. Проблема єдиності розв'язку теж не опускається з поля зору. А ось проблема існування, нелегка для сприйняття, відведена на другий план і в деяких місцях замовчується.

У кожному модулі конспекту лекцій лінія викладу теоретичного матеріалу проходить шлях від введення основних понять до доведення ключових теорем, що мають прямий вихід до широко відомих чисельних методів. Ці "виходи", як правило, описані в останніх параграфах модулів. Для їх складання була проаналізована база з декількох десятків існуючих підручників як з функціонального аналізу, так і з різних розділів обчислювальної математики.

Перший модуль присвячений метричним просторам і стискуючим операторам. Він завершується оглядом задач, у яких можливе застосування принципу стискуючих операторів і методу простих ітерацій для наближеного розв'язання рівнянь різного типу.

Другий модуль представляє теорію рядів Фур'є в гільбертовому просторі. Значну увагу приділено різноманітності ортогональних систем: тригонометричних, поліноміальних, систем ступінчастих функцій. Модуль завершується описом зв'язку ряду Фур'є з завданням апроксимації і поясненням таких істотних особливостей, як характер збіжності ряду Фур'є, специфіка тригонометричної і поліноміальної апроксимацій, відмінності між рядами Фур'є і Тейлора.

Третій модуль присвячений теорії лінійних операторів і охоплює суміжні питання оптимізації функціоналу. Виклад завершується описом варіаційного і проєкційного підходу до наближеного розв'язання лінійних операторних рівнянь. Детально розібрані метод найменших квадратів і метод Гальоркіна. Крім того, в третьому модулі є й інші виходи до обчислювальної математики, представлені в різних параграфах: пошук розв'язку рівняння у вигляді ряду Фур'є за власними функціями оператора, розв'язок інтегрального рівняння методом заміни ядра на вироджене, наближена мінімізація функціоналу методом Рітца.

Крім суто дедуктивного методу навчання, використовуються евристичні методи (за допомогою аналогії, вибіркової перевірки) та інші методи навчання, в тому числі ті, що базуються на неформальних ідеях математичних конструкцій. Більшість параграфів мають передмову, що окреслює зв'язок

запропонованих математичних конструкцій функціонального аналізу з аналогічними конструкціями математичного аналізу, геометрії або лінійної алгебри, та деякі з яскравих застосувань у природознавстві і технологіях.

Таким чином, курс не претендує на повноту теорії, але робить акцент на алгоритмічну складову функціонального аналізу. Виклад теоретичних конструкцій спрощено до елементарного при спробі зберегти класичну якість дисципліни і враховувати те, що закладено в цей розділ математики. Абстрактна енергія функціонального аналізу істотно приборкана в порівнянні з академічним курсом, але витримана в такому обсязі, щоб її можна було б обґрунтовано застосовувати.

Конспект лекцій і збірник задач побудовані таким чином, щоб зробити предмет максимально доступним для самостійного засвоєння і з перших занять активізувати навчальну діяльність студентів в умовах жорстких обмежень навчального часу. Якщо не витратити заняття на послідовне і детальне представлення матеріалу, а перевести навчальний процес у режим оглядових лекцій та консультацій з завданнями, то вдається оптимізувати витрати аудиторних годин. Оглядові лекції доцільно обмежити невеликою кількістю формальних даних і присвятити різносторонньому обговоренню ключових математичних ідей функціонального аналізу і супутніх позаматематичних асоціацій. Курс функціонального аналізу гостро потребує такого підходу, оскільки підводить певний підсумок накопиченого досвіду при вивченні інших розділів математики.

В оглядові лекції можна включити, наприклад, такі питання: проблема подібності та відмінності між об'єктами, яка чисельно розв'язується за допомогою різних метрик; яка буває збіжність і які причини її різноманіття; лінійність як універсальна позитивна характеристика математичних конструкцій і нелінійність як джерело неприємностей; в чому відмінність між розкладом і апроксимацією функцій; загальне поняття неперервності і роль, яку вона відіграє в різних чисельних методах; відносна простота і привабливість скінченновимірних просторів, численні методи, які базуються на редукції до скінченновимірної задачі. Конспект лекцій покликаний підготувати і підштовхнути студента до роздумів про ідеологію, яка закладена в курсі функціонального аналізу. Відповідні оглядові лекції можуть істотно посилити цей ефект.

Збірник задач містить великий банк різнорівневих завдань з великою кількістю варіантів і розроблений для зручного розподілу балів при оцінюванні: наприклад, від 1 бала за найпростішу однокрокову задачу до 10 балів за багатокроковий розрахунок з реалізацією в математичному пакеті.

При проведенні практичних занять на базі цього навчально-методичного комплексу відбувається перенесення акцентів з техніки ручного обчислення на організацію обчислювального процесу на комп'ютери, яке неминуче в сучасних умовах.

**Висновки.** Розглянутий навчально-методичний комплекс [2-3] дозволяє і частково змушує реорганізувати навчальний процес з дисципліни "Функціональний аналіз". Доцільне використання комп'ютерів і кваліфікована інтерпретація результатів повинні стати однією з основних цілей навчання не тільки функціонального аналізу, але взагалі математики в педагогічному ВНЗ. Запропонований збірник задач [3] дає можливість, з одного боку, повторити

раніше набуті навички розв'язання різних задач, з іншого боку, дозволяє студентам навчитись використовувати математичні пакети. Збірник задач [3] включає 58 задач (по 20 варіантів кожної), всі завдання мають зразки або вказівки до розв'язання і посилання на конспект лекцій [2].

**Перспективи подальших пошуків у напрямі дослідження.** У навчально-методичному комплексі [2-3] залишилися не відпрацьовані специфічні проблеми, пов'язані з відмінностями схоластичної (навчальної, книжкової) і комп'ютерної математики, які вимагають уваги на початковому етапі експлуатації математичних пакетів. У збірнику [3] недостатньо задач, що показують типові труднощі, які виникають у студентів, коли комп'ютер видає відповідь у вигляді символічного виразу, який може містити спеціальні функції, багато з яких студент бачить уперше. Прикладні математичні пакети вимагають набагато більш відповідального ставлення до роботи з типами даних (числами, змінними, виразами, функціями), ніж це прийнято в швидких розрахунках на папері.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Антоневи́ч А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лабораторный практикум : учеб. пособие для матем. спец. Вузов / А. Б. Антоневи́ч, Е. И. Ваткина, М. А. Мазель и др.; под ред. А. Б. Антоневи́ча и Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2003. – 179 с.
2. Бобилев Д. Є. Функціональний аналіз / [за ред. д. пед. н., доцента І. В. Лов'янової]. – Кривий Ріг : Dionat, 2016 – 152 с.
3. Бобилев Д.Є. Функціональний аналіз: збірник задач / Д. Є. Бобилев. – Кривий Ріг: Dionat, 2017 – 98 с.
4. Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : учеб. пособ. для вузов / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 400 с.
5. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика / В. И. Лебедев. – 4-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – 295 с.
6. Мышкис А. Д. О преподавании математики прикладникам / А.Д.Мышкис // Математика в высшем образовании. – 2003. – № 1. – С. 37-52.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ [Текст]: учебник для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
8. Треногин В. А. и др. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, В. М. Писаревский, Т. С. Соболева. – М. : Наука, 1984. – 256 с.

**Стаття надійшла до редакції 20.08.2017**